AnW - Woche 7

11.04.2024
Nicolas Wehrli

Heute:

II. Theory Recap
- Bedingte Zufallsvariablen, Mehrere Zufallsvariablen
- Varianz
  - ↳ Verteilungen Revisited - Varianz
- Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten
- ~~Randomisierte Algorithmen~~
- ~~Target Shooting~~
- ~~Duplikate finden~~

III. Circle Aufgabe

IV. Kahoot

Bedingte Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

Sei $A \subseteq \Omega$.

Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ ist *dieselbe Funktion* wie X, aber der Definitionsbereich ist auf die Menge A eingeschränkt:

Zufallsvariable: $X|A : A \to \mathbb{R}$

Dichtefunktion

$$f_{X|A} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X = x \mid A]$$

Verteilungsfunktion

$$F_{X|A} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \Pr[X \leq x \mid A]$$

X ist **unabhängig** von A, falls $f_{X|A} = f_X$.

Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X \mid A] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x \mid A] = \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

Linearität des Erwartungswertes gilt immer noch.

$$\mathbb{E}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b}_{X} \Big| A\Big) = \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X(\omega) \cdot \Pr[\omega]$$

$$= \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i(\omega) + b\Big) \cdot \Pr[\omega]$$

$$= \frac{1}{\Pr[A]} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in A} a_i X_i(\omega) \cdot \Pr[\omega] + \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} b \cdot \Pr[\omega]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{1}{\Pr[A]} \sum_{\omega \in A} X_i(\omega) \cdot \Pr[\omega] + b \cdot \frac{1}{\Pr[A]} \cdot \Pr[A]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbb{E}(X_i \mid A) + b$$

$\square$

Mehrere Zufallsvariablen

Haben wir schon oft verwendet als Summe $X = \sum X_i$.

Wir betrachten nun oft die Wahrscheinlichkeit der Form:

$$\Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}].$$

Dazu definieren wir auch die gemeinsame Dichte:

$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

Man bemerke '$X = x, Y = y$' = '$X = x$' $\cap$ '$Y = y$'.

Da $\bigcup_{y \in W_Y}$ '$Y = y$' $= \Omega$ eine disjunkte Vereinigung ist, folgt per Additionssatz:

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y)$$

"Randdichte von X" = "Dichte von X"

Unabhängigkeit von mehrere ZV:

Definition (Version 2) Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heissen unabhängig genau dann, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

Varianz

Wir wollen ein Mass um die Nähe der Verteilung zum Erwartungswert zu quantifizieren.

Wir nehmen dafür den Erwartungswert der 'Distanz' von X zum $\mathbb{E}[X]$.

Definition 2.39. Für eine Zufallsvariable X mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ definieren wir die *Varianz* $\mathrm{Var}[X]$ durch

$$\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[\underbrace{(X-\mu)^2}_{f(x)}] = \sum_{x \in W_X} \underbrace{(x-\mu)^2}_{f(x)} \cdot \Pr[X = x].$$

Die Grösse $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ heisst *Standardabweichung* von X.

$(X-\mu)^2$ anstatt $|X-\mu|$ da es mathematisch mehr Sinn (stetig differenzierbar, etc.)

Satz 2.40. Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Beweis: $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[-2\mu X] + \mathbb{E}[\mu^2]$

$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \mathbb{E}[X] + \mu^2$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$\boxtimes$

Satz 2.41. Für eine beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X].$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[aX+b] &= \mathbb{E}\left[\left(a\cdot X + b - \mathbb{E}[a\cdot X + b]\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(a\cdot X + b - a\,\mathbb{E}[X] - b\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(a\cdot X - a\cdot\mathbb{E}[X]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(a\cdot(X-\mathbb{E}[X])\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[a^2\cdot(X-\mathbb{E}[X])^2\right] = a^2\cdot\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= a^2\cdot \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Satz 2.61. *(Multiplikativität des Erwartungswerts)* Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \sum_{x_1 \in W_{X_1}} \cdots \sum_{x_n \in W_{X_n}} x_1 \cdots x_n \cdot \Pr[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n]$$

$$\text{(Unabhängigkeit)} = \sum_{x_1 \in W_{X_1}} \cdots \sum_{x_n \in W_{X_n}} x_1 \cdots x_n \cdot \Pr[X_1 = x_1] \cdot \Pr[X_2 = x_2] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]$$

$$= \sum_{x_1 \in W_{X_1}} x_1 \Pr[X_1 = x_1] \cdot \sum_{x_2 \in W_{X_2}} x_2 \Pr[X_2 = x_2] \cdot \ldots \cdot \sum_{x_n \in W_{X_n}} x_n \Pr[X_n]$$

$$= \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

$\boxtimes$

Satz 2.62. Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und $X := X_1 + \ldots + X_n$ gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n].$$

<u>Beweis:</u> Ich zeige nur den Fall $n=2$. Sei X, Y unabhängig.

$$\mathbb{E}[(X+Y)^2] = \mathbb{E}[X^2+2XY+Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\,\mathbb{E}[X\cdot Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$

$$\text{(Unabhängigkeit)} \quad = \mathbb{E}[X^2] + 2\,\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$

$$\mathbb{E}[X+Y]^2 = (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\,\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$$

$$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

$\square$

<u>Bemerkung:</u> $\mathrm{Var}[X\cdot Y] \neq \mathrm{Var}[X]\cdot\mathrm{Var}[Y]$ im Allg.

Was noch fehlt: Varianz von Bernoulli, Binomial und Geometrisch Verteilung (könnt ihr nun selber nachrechnen, sonst vllt. ~~nächste Woche~~)

jetzt

Verteilungen

Zur Erinnerung: Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$:

Dichtefunktion: $f_X(k) = Pr[X = k]$

Verteilungsfunktion: $F_X(k) = Pr[X \leq k]$

$\boxed{X \sim \text{Bernoulli}(p)}$

$$f_X(k) = \begin{cases} p & \text{für } k=1 \\ 1-p & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$Pr[X=1] = p$

$Pr[X=0] = 1-p$

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p)) - p^2 \\ &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

Intuition: Eine binomialverteilte Zufallsvariable ist eine Summe von n unabhängigen bernoulliverteilten Zufallsvariablen mit gleicher W'keit p.

$$\boxed{X \sim \mathrm{Bin}(n,p)} \sim \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ber}(p)$$

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} & 0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Pr[X=k]$$

$$\underbrace{\Pr[X=k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N}_0}$$

(Note that $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$)

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np$$

per Linearität des Erwartungswertes.

X_i unabhängig

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = np(1-p)$$

$$\boxed{X \sim Po(\lambda)}$$

$$f_X(i) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} & \text{für } i \in \mathbb{N}_0 \quad Pr[X=i] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in W_X} x \, Pr[X=x]$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \, Pr[X=i]$$

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

↓

Herleitung

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \underbrace{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}}_{Pr[X=i]} \qquad (\text{da } W_X \subseteq \mathbb{N}_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \underline{e^{-\lambda}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$
$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$
$$= \underline{\underline{\lambda}}$$

Potenzreihenentwicklung von e^x. Siehe Analysis.

$$Var[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - \lambda^2$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \, Pr[X=i] - \lambda^2 \qquad (\text{da } W_X \subseteq \mathbb{N}_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+1}}{i!} - \lambda^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda \cdot i \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} - \lambda^2$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}} + \underline{\lambda e^{-\lambda}} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}} - \lambda^2$$

$$= \lambda \cdot \mathbb{E}(X) + \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} - \lambda^2$$

Potenzreihenentwl. v. e^{λ}

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \longrightarrow \mathrm{Po}(\lambda)$$

für $n \to \infty$

$$\boxed{X \sim Geo(p)}$$

Intuition: Wir versuchen etwas mit Erfolgswahrscheinlichkeit p so lange bis wir Erfolg haben.

$$f_X(i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & \text{für } i \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad Pr[X=i]$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot Pr[X=i] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot Pr[X=i]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left(-(1-p)^{i}\right)$$

$$= (-p) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i}\right) = (-p) \cdot \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$= (-p) \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

Alternatively: $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \overbrace{p \cdot (1-p)^{i-1}}^{Pr[X=i]} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot p \cdot (1-p)^{i}$

$$= \underline{\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^{i}} + \sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1}$$

$$= (1-p) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X=i]$$

$$= (1-p)\, \mathbb{E}[X] + 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X] - (1-p)\,\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\Rightarrow \quad p\,\mathbb{E}[X] = 1$$

$$\underline{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot p \cdot (1-p)^{i-1} - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} (i+1)i\,(1-p)^{i-1} - i\,(1-p)^{i-1} \right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{\delta p^2}\left((1-p)^{i+1}\right) + \frac{\delta}{\delta p}\left((1-p)^{i}\right) \right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i+1} \right) + \frac{\delta}{\delta p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i} \right) \right) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+2} \right) + \frac{\delta}{\delta p} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+1} \right) \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2} (1-p)^2 \cdot \frac{1}{p} + \frac{\delta}{\delta p} (1-p) \cdot \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \left(\frac{\delta^2}{\delta p^2} \left(\frac{1-2p+p^2}{p} \right) + \frac{\delta}{\delta p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= p \left(\frac{2}{p^3} - 0 + 0 - \frac{1}{p^2} - 0 \right) - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung:

Satz 2.45. Ist $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, so gilt für alle $s, t \in \mathbb{N}$:

$$\Pr[X \geq s + t \mid X > s] = \Pr[X \geq t].$$

Negative Binomialverteilung

Intuition: Sowie $Bin(n,p) \approx \sum_{i=1}^{n} Ber(p)$

entspricht die negative Binomialverteilung mit Parametern n und p der Summe $\sum_{i=1}^{n} Geo(p)$

unabhängige!

"Warten auf den n-ten Erfolg."
Wobei hier die Erfolgsw'keit sich nicht verändert.
(Im Gegensatz zu Coupon Collector)

Sei $X \sim$ negativBinomial(n,p)

$$f_X(k) = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} \cdot (1-p)^{k-n} \cdot p^n & \text{für } k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weshalb $\binom{k-1}{n-1}$?

Wir warten auf den n-ten Erfolg. Also ist der Zeitpunkt des n-ten Erfolgs fixiert (an k-ter Stelle).

$\Longrightarrow$ Von den vorherigen $(k-1)$ Stellen waren $(n-1)$ Erfolge.

$\Longrightarrow$ $\binom{k-1}{n-1}$ mögliche Anordnungen.

$\mathbb{E}[X] = \frac{n}{p}$ $\leftarrow$ per Linearität des Erwartungswertes: $X_i \sim Geo(p)$ n-mal Geometrische Verteilung

$$Var(X) \overset{\text{unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \cdot \frac{(1-p)}{p^2}$$

Satz 2.65 (Waldsche Identität). N und X seien zwei unabhängige Zufallsvariable, wobei für den Wertebereich von N gilt: $W_N \subseteq \mathbb{N}$. Weiter sei

$$Z := \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

wobei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X seien. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X].$$

Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

Satz 2.67. *(Ungleichung von Markov)* Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$.

gilt nur weil X nicht-negativ?

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_x} x \cdot \Pr[X=x] \geq \sum_{\substack{x \in W_x \\ x \geq t}} x \cdot \Pr[X=x]$$

$$\geq \sum_{\substack{x \in W_x \\ x \geq t}} t \cdot \Pr[X=x] = t \cdot \underbrace{\sum_{\substack{x \in W_x \\ x \geq t}} \Pr[X=x]}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X] \geq t \cdot \Pr[X \geq t] \quad \Big| :t$$

$$\frac{\mathbb{E}[X]}{t} \geq \Pr[X \geq t]$$

kehrt nicht da $t > 0$

$\boxtimes$

Satz 2.68. *(Ungleichung von Chebyshev)* Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$. Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$$

oder äquivalent dazu $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}] \;\leq\; 1/t^2$.

<u>Beweis:</u> $|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \iff (X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2$

$$\Rightarrow \Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2]$$

Da $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$ nicht-negative Werte annimmt und $t^2 > 0$ gilt per Markov:

$$\Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2] \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{t^2} = \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$$

$\boxtimes$

Keine Zusatzbedingung!

Satz 2.70 (Chernoff-Schranken). Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ and $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$:

individuelle W'keiten (X ist nicht ganz binomial)

(i) $\Pr[X \geq (1+\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

(ii) $\Pr[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

(iii) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mathbb{E}[X]$.

Auf Beweis verzichten wir. (Skript S. 143–144)

Randomisierte Algorithmen

Klassisch (wie in AnD):

Für eine Eingabe I, ist $A(I)$ die Ausgabe des deterministischen Algorithmus.

Dann beweisen wir:

1. Korrektheit: für alle Eingaben I: $A(I)$ korrekt

2. Laufzeit: für alle Eingaben I mit $|I|=n$: Laufzeit in $O(f(n))$

Neu:

Für eine Eingabe I und Zufallszahlen R, ist $A(I, R)$ die Ausgabe des nichtdeterministischen Algorithmus.

Nun beweisen wir:

1. Korrektheit: für alle Eingaben I gilt: $\Pr[\underbrace{A(I,R) \text{ korrekt}}_{\text{Menge}}] \geq \dots$

2. Laufzeit:

für alle Eingaben I mit $|I|=n$: $\mathbb{E}[\text{Laufzeit}] = O(f(n))$

und/oder $\Pr[\text{Laufzeit} \leq f(n)] \geq \dots$

Wir klassifizieren 2 Arten von randomisierten Algorithmen.

Las-Vegas-Algorithmen (Bsp. Quicksort)

- Geben nie eine falsche Antwort, aber die Laufzeit ist eine Zufallsvariable T.

Ziel: $\mathbb{E}$[Laufzeit] = „polynomiell“ (in Eingabelänge)

Alternative Definition:

Wir können den Algorithmus abbrechen und '???' ausgeben lassen, falls eine gewisse Laufzeit überschreitet.
(Um dies zur vorigen Def. äquivalent zu machen, können wir den Algo solange wiederholen bis er nicht mehr '???' ausgibt)

Ziel: Pr[Antwort „???“] = „winzig“

Monte-Carlo-Algorithmus (Testen ob eine Münze fair ist)

- Laufzeit immer polynomiell, aber liefert manchmal falsche Antwort.

Ziel: Pr[Antwort falsch] = „winzig“

Satz:

- QuickSort bestimmt *immer* das richtige Ergebnis
- $\mathbf{E}$[Laufzeit] = O(n ln n)

Las-Vegas

- Testen einer Münze: fair (Kopf/Zahl) vs. fake (Kopf/Kopf)

Algorithmus: werfe Münze ~~ein~~ 100 Mal, falls $\geq$ **1 mal** Zahl: return „fair"
ansonsten: return „fake"

Fehlerw'lichkeit:
$$\begin{cases} 0, & \text{falls Münze fake} \\ (1/2)^{100}, & \text{falls Münze fair} \end{cases}$$

Monte-Carlo

Einseitiger Fehler

Analyse – Las Vegas

Satz 2.72. Sei $\mathcal{A}$ ein randomisierter Algorithmus, der nie eine falsche Antwort gibt, aber zuweilen '???' ausgibt, wobei

$$\Pr[\mathcal{A}(I) \text{ korrekt}] \geq \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $\delta > 0$: bezeichnet man mit $\mathcal{A}_\delta$ den Algorithmus, der $\mathcal{A}$ solange aufruft, bis entweder ein Wert verschieden von '???' ausgegeben wird (und $\mathcal{A}_\delta$ diesen Wert dann ebenfalls ausgibt) oder bis $N = \varepsilon^{-1} \ln \delta^{-1}$-mal '???' ausgegeben wurde (und $\mathcal{A}_\delta$ dann ebenfalls '???' ausgibt), so gilt für den Algorithmus $\mathcal{A}_\delta$, dass

$$\Pr[\mathcal{A}_\delta(I) \text{ korrekt}] \geq 1 - \delta.$$

Beweis:

$$\Pr[\underbrace{\mathcal{A} \text{ gibt } N\text{-mal '???'}}_{B}] \leq (1-\varepsilon)^N$$

Da $1-x \leq e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Beweis per Analysis $f(x) = e^{-x} + x \geq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$)

folgt $(1-\varepsilon)^N \leq (e^{-\varepsilon})^N$

$$\Rightarrow \Pr[B] \leq e^{-\varepsilon N} = \delta \quad |\ln(\,)$$

$$-\varepsilon \cdot N \cdot \ln(e) = \ln(\delta) \quad |:(-\varepsilon)$$

$$N = -\varepsilon^{-1} \cdot \ln(\delta)$$

$$\underline{\underline{N = \varepsilon^{-1} \cdot \ln(\delta^{-1})}}$$

Analyse - Monte-Carlo

Einseitiger Fehler

Satz 2.74. Sei $\mathcal{A}$ ein randomisierter Algorithmus, der immer eine der beiden Antworten JA oder NEIN ausgibt, wobei

$$\Pr[\mathcal{A}(I) = \text{JA}] = 1 \quad \text{falls I eine JA-Instanz ist,}$$

und

$$\Pr[\mathcal{A}(I) = \text{NEIN}] \geq \varepsilon \quad \text{falls I eine NEIN-Instanz ist.}$$

!

Dann gilt für alle $\delta > 0$: bezeichnet man mit $\mathcal{A}_\delta$ den Algorithmus, der $\mathcal{A}$ solange aufruft, bis entweder der Wert NEIN ausgegeben wird (und $\mathcal{A}_\delta$ dann ebenfalls NEIN ausgibt) oder bis $N = \varepsilon^{-1} \ln \delta^{-1}$-mal JA ausgegeben wurde (und $\mathcal{A}_\delta$ dann ebenfalls JA ausgibt), so gilt für alle Instanzen I

$$\Pr[\mathcal{A}_\delta(I) \text{ korrekt}] \geq 1 - \delta.$$

Beweis: Falls I eine Ja-Instanz ist gilt
$\Pr[A_\delta(I) \text{ korrekt}] = 1$

Falls I eine Nein-Instanz ist, gilt für

jeden Aufruf von A: $\Pr[A(I) = \text{Nein}] \geq \varepsilon$.

Die W'keit, dass dann in $N = \varepsilon^{-1} \ln(\delta^{-1})$ unabhängigen Aufrufen kein einziges 'Nein' ausgegeben wird ist:

$$(1-\varepsilon)^N \leq e^{-\varepsilon N} = e^{\ln \delta} = \delta \qquad \square$$

Zweiseitiger Fehler

Satz 2.75. Sei $\varepsilon > 0$ und $\mathcal{A}$ ein randomisierter Algorithmus, der immer eine der beiden Antworten JA oder NEIN ausgibt, wobei

$$\Pr[\mathcal{A}(I) \text{ korrekt}] \geq 1/2 + \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $\delta > 0$: bezeichnet man mit $\mathcal{A}_\delta$ den Algorithmus, der $N = 4\varepsilon^{-2} \ln \delta^{-1}$ unabhängige Aufrufe von $\mathcal{A}$ macht und dann die Mehrheit der erhaltenen Antworten ausgibt, so gilt für den Algorithmus $\mathcal{A}_\delta$, dass

$$\Pr[\mathcal{A}_\delta(I) \text{ korrekt}] \geq 1 - \delta.$$

Beweis: lassen wir aus ☺

Optimierungsprobleme ausgelassen (siehe Skript)

Target Shooting

Problemstellung: Gegeben $S \subseteq U$ endlich.

Bestimme $\approx \frac{|S|}{|U|}$

Annahmen: Wir können Elemente von U gleichverteilt ziehen.

Wir haben eine Indikatorfunktion $I_S : U \to \{0,1\}$

$$I_S(u) = 1 \iff u \in S$$

Algo:

Target-Shooting

1: Wähle $u_1, \ldots, u_N$ aus U, zufällig, gleichverteilt und unabhängig
2: **return** $\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} I_S(u_i)$

Wie gross sollte N sein?

Wir definieren $Y_i = I_S(u_i)$ für $i = 1, \ldots, N$

wobei Y_i unabhängig und $Y_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ $\quad p := \frac{|S|}{|U|}$

Sei $Y := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_i$ die Ausgabe des Algorithmus.

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{N} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[Y_i] = \frac{1}{N}(N \cdot p) = p$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{N^2} \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] \underset{Y_i \text{ unabhängig}}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}[Y_i] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} p(1-p) = \frac{1}{N}(p-p^2)$$

Wir wollen nun, dass für beliebig kleine, gegebene $\varepsilon, \delta > 0$,

$$(*) \quad \Pr\left[\left|Y - \frac{|S|}{|U|}\right| \le \varepsilon \frac{|S|}{|U|}\right] \ge 1 - \delta \qquad \text{gilt.}$$

Nun können wir N in Abhängigkeit von ε, δ und $\frac{|S|}{|U|}$ bestimmen, so dass $(*)$ erfüllt wird.

Satz

Seien $\delta, \varepsilon > 0$. Falls $N \ge 3\frac{|U|}{|S|} \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \ln(2/\delta)$, ist die Ausgabe Y von Target-Shooting *mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \delta$ im Intervall $\left[\frac{|S|}{|U|} \pm \varepsilon \frac{|S|}{|U|}\right]$ (multiplikativer Fehler von $1 \pm \varepsilon$).*

Beweis:

äquivalent formuliert

$$\Pr\left[\left|Y - \frac{|S|}{|U|}\right| > \varepsilon \frac{|S|}{|U|}\right] = \Pr\left[|Y - \mathbb{E}[Y]| > \varepsilon \mathbb{E}[Y]\right]$$

$$= \Pr\left[|Z_N - \mathbb{E}[Z_N]| > \varepsilon \mathbb{E}[Z_N]\right] \le \delta$$

Beachte: $Z_N := Y$ (zeigt die Abhängigkeit von N (Y_N wird schon verwendet))

Da $Z_N = Y_1 + \dots + Y_N$ eine Summe von N unabhängigen Zufallsvariablen ist $\Longrightarrow$ Chernoff.

$$\boxed{\underbrace{\Pr\left[|Z_N - \mathbb{E}[Z_N]| > \varepsilon \mathbb{E}[Z_N]\right]}_{A} = \Pr\left[Z_N > (1+\varepsilon)\mathbb{E}[Z_N]\right] + \Pr\left[Z_N < (1-\varepsilon)\mathbb{E}[Z_N]\right]}$$

!

Satz 2.70 (Chernoff-Schranken). Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = p_i$ and $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$:

(i) $\Pr[X \geq (1+\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

(ii) $\Pr[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 \mathbb{E}[X]}$ für alle $0 < \delta \leq 1$,

(iii) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mathbb{E}[X]$.

Per (i) und (ii)

$$A \leq e^{-\frac{1}{3}\varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}[Z_N]} + e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2 \mathbb{E}[Z_N]}$$

$$\leq 2 \cdot e^{-\frac{1}{3}\varepsilon^2 \mathbb{E}[Z_N]} = 2 \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2 N |S|}{3|U|}} \overset{\text{soll}}{\leq} \delta \quad \Big| :2$$

$$e^{-\frac{\varepsilon^2 N |S|}{3|U|}} \leq \frac{\delta}{2} \quad \Big| \ln$$

$$-\frac{\varepsilon^2 N |S|}{3|U|} \leq \ln\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$N \geq 3 \cdot \frac{|U|}{|S|} \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \ln\left(\frac{2}{\delta}\right) \qquad \boxtimes$$

Duplikate finden

$\mathcal{S} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, Folge von n Elementen (**Datensatz**).
(i, j), $1 \leq i < j \leq n$, heisst **Duplikat** in $\mathcal{S}$, falls $s_i = s_j$.

Gegeben ein Datensatz $\mathcal{S}$, finde alle Duplikate.

$$\mathcal{S} = (\underset{1}{A} \quad \underset{2}{C} \quad \underset{3}{B} \quad \underset{4}{Z} \quad \underset{5}{C} \quad \underset{6}{B} \quad \underset{7}{C})$$

Duplikate $\mathrm{Dupl}(\mathcal{S}) = \{(2,5), (2,7), (5,7), (3,6)\}$ (4 Duplikate)

Elemente in S sind sehr gross.
Speicherzugriffe und Vergleiche sind recht teuer.

Wir verwenden Hashfunktionen. Seien die Elemente von S aus einem Universum U.

Dann für $h: U \to [m]$ nehmen wir folgendes an:

- h ist effizient berechenbar.
- h verhält sich wie eine Zufallsfunktion, d.h.

$$\forall u \in U \ \forall i \in [m]: \ \Pr[h(u) = i] = \frac{1}{m} \quad \text{(unabhängig)}$$

Naives Verfahren war: Sortieren & vergleichen in $O(n \log n)$

Nun machen wir

$$\begin{array}{ccccccc} A & C & B & Z & C & B & C \end{array}$$

$\downarrow$ Hashen u. Indexieren (Hashmap)

$$(\underbrace{h(A)}_{\mathbf{31}},1)\quad(\underbrace{h(C)}_{\mathbf{27}},2)\quad(\underbrace{h(B)}_{\mathbf{12}},3)\quad(\underbrace{h(Z)}_{\mathbf{12}},4)\quad(\underbrace{h(C)}_{\mathbf{27}},5)\quad(\underbrace{h(B)}_{\mathbf{12}},6)\quad(\underbrace{h(C)}_{\mathbf{27}},7)$$

$\downarrow$ Sortieren

$$(\mathbf{12},3)\quad(\mathbf{12},4)\quad(\mathbf{12},6)\quad(\mathbf{27},2)\quad(\mathbf{27},5)\quad(\mathbf{27},7)\quad(\mathbf{31},1)$$

$\downarrow$ Durchlaufen

$$\{(3,6),\qquad (2,5),(2,7),(5,7)\}$$

in $O(n \log n)$.

Auf den ersten Blick scheint sich nichts verändert zu haben.

Was sich aber verändert hat, ist die Grösse der Elemente, die wir vergleichen und speichern.

Kollisionen sind die neuen (unerwünschten) Duplikate.
I.e. (i,j), $1 \leq i < j \leq n$ mit $s_i \neq s_j$
aber $h(s_i) = h(s_j)$.

bernoulli-verteilt

Sei $K_{i,j} = 1 \Leftrightarrow (i,j)$ ist eine Kollision

$$\Pr[K_{i,j} = 1] = \begin{cases} 1/m & \text{falls } s_i \neq s_j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und daher} \qquad \mathbb{E}[K_{i,j}] \leq \frac{1}{m}\,.$$

Daraus folgt:

$$\mathbb{E}[\#\text{Kollisionen}] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[K_{i,j}] \leq \binom{n}{2} \frac{1}{m}\,.$$

$$\mathbb{E}[\#\text{Kollisionen}] \leq \binom{n}{2}\frac{1}{m} \quad < 1 \qquad \text{für } m = n^2$$

Alternativer Ansatz: Bloom Filter

Wir wählen $m, k \in \mathbb{N}$ und k Hashfunktionen (zufällig)

$$h_i : U \to [m], \quad i = 1, \dots, k \ .$$

So assoziieren wir mit jedem s_i in $\mathcal{S}$ einen Hash-Vektor

$$(x_1, \dots, x_k) = (x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}) := (h_1(s_i), \dots, h_k(s_i))$$

Dann bereiten wir noch ein boolsches Array $M[1, \dots m]$ vor.

Beispiel:

$$\mathcal{S} = \begin{array}{c} (\\ \end{array} \begin{array}{ccccccc} A & C & B & Z & F & H & \underline{C} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \begin{array}{c}) \\ \end{array}$$

$m = 9, \ k = 3.$

$$A \mapsto (5,4,1), B \mapsto (4,6,1), C \mapsto (5,1,2),$$
$$F \mapsto (1,9,4), H \mapsto (4,7,5), Z \mapsto (4,2,5)$$

$$M = \begin{array}{c} (\\ \end{array} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \begin{array}{c}) \\ \end{array}$$

$$\mathcal{L} = \{4, 7\}$$

Analyse lassen wir.

Resultate:

$$\mathbb{E}[\#\text{falsche Einträge in } \mathcal{L}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] \leq n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{k(n-1)}\right)^{k}$$

Dieser Wert ist $O(1)$ für $k = \ln n$ und $m = n \ln n$.

k und m gross $\Rightarrow$ #Falsche Einträge klein.

Laufzeit: kn Hashfunktionsberechnungen. k gross $\Rightarrow$ langsamer.

Zusätzlicher Speicher: m. m gross $\Rightarrow$ mehr Speicher.

III. Circle Aufgabe

Aufgabe 1 – ***Second Moment Method***

~~Ruth ist es soooo langweilig. Wenn sie doch bloss irgend eine Beschäftigung hätte. Sie denkt einen Moment nach, hatte sie noch Hausaufgaben? Normalerweise hasst sie Hausaufgaben aber jetzt wünschte sie sich sie hätte noch welche zu erledigen. Dann denkt sie verzweifelt über einen zweiten Moment nach und erinnert sich an einige farbige Perlen die sie noch irgendwo hatte. Vielleicht könnte sie eine Kette daraus machen.~~

Sie findet in ihrem Schrank eine grosse Schachtel voller Perlen und ohne zu beachten welche Farben die Perlen haben zieht sie eine Perle nach der andern und reiht sie aneinander um eine schöne Kette zu bilden. Sie konstruiert eine Kette mit $n \geq 3$ farbigen Perlen. Jede Perle ist rot mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und sonst blau, unabhängig von den anderen Perlen. Die Perlen formen natürlich einen Kreis, der Verschluss der Kette wird ignoriert. Wir sind interessiert an der Zufallsvariable X, der Anzahl Farbenwechsel entlang der Kette.

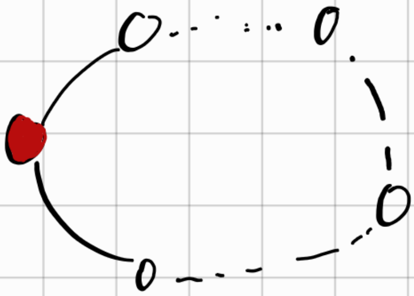
Sei $n \geq 3$. Wir betrachten den Kreisgraphen $C_n = (V, E)$. Jeder Knoten v in C_n erhält eine Farbe $\{rot, blau\}$ unabhängig mit W'keit $\frac{1}{2}$. Sei $f: V \to \{rot, blau\}$ die Farbfunktion.

$X :=$ "Anzahl Kanten $\{u,v\} \in E$, $f(u) \neq f(v)$"

Wir definieren $X_1, \ldots, X_n$ wie folgt. Für $1 \leq i \leq n-1$, sei X_i die Indikatorvariable für das Ereignis dass die Perlen i und $i+1$ unterschiedliche Farben haben und sei X_n die Indikatorvariable dass Perlen n und 1 unterschiedliche Farben haben. Offensichtlich gilt $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(a) Zeigen Sie dass X *nicht* binomialverteilt ist.

Sei X binomialverteilt mit N und p



1 – Farbwechsel unmöglich

$$\Pr[X=1] = \binom{N}{1} \cdot p\,(1-p)^{N-1} = 0$$

$$\Longrightarrow \underset{1.}{N=0} \quad \text{oder} \quad \underset{2.}{p=0} \quad \text{oder} \quad \underset{3.}{p=1}$$

1. $\Pr[X=2] = \binom{0}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{-2} = 0$

2. $\Pr[X=2] = \binom{N}{2}\, 0^2 \cdot (1-p)^{N-2} = 0$

3. $\Pr[X=2] = \binom{N}{2}\, 1^2 \cdot (1-1)^{N-2} \neq 0$

für $N=2$, (Annahme in Kombinatorik: $0^0 = 1$)

$\Pr[X=2] = 1$ für $N=2, p=1$

Widerspruch ↯

(b) Sei $1 \leq i \leq n$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_i]$ und $\mathbb{E}[X]$.

X_i: (i) —— (i+1)

$X_i = 0$: rot, rot: $\frac{1}{4}$ (+); blau, blau: $\frac{1}{4}$

$X_i = 1$: blau, rot: $\frac{1}{4}$ (+); rot, blau: $\frac{1}{4}$

gleich wahrscheinlich (Farbzuteilung unabhängig und gleichverteilt)

$$\Rightarrow X_i \sim \mathrm{Ber}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \underline{\underline{n \cdot \frac{1}{2}}}$$

(c) Sei $t > 0$. Benutzen Sie die Markov Ungleichung um eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X \geq \mathbb{E}[X] + t]$ zu finden.

<u>Zur Erinnerung:</u>

Satz 2.67. *(Ungleichung von Markov)* Sei X eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Oder äquivalent dazu $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t$.

Können wir Markov überhaupt anwenden?

Ja, X nimmt nur Werte in $[n]$ an.

$$\Pr[X \geq \underbrace{\mathbb{E}[X] + t}_{t'}]$$

$$\Pr[X \geq t'] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t'} = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X] + t} = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + t} = \frac{n}{n + 2t}$$

! d.) Berechne $Var[X]$.

Wichtigste Aufgabe.

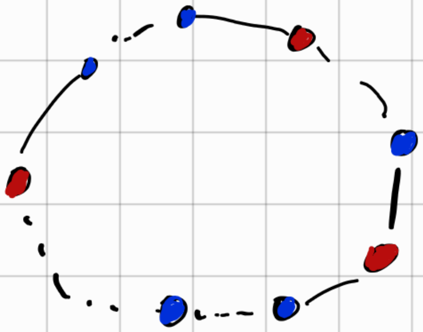
$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

kennen wir schon

Was ist $\mathbb{E}[X^2]$?

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=0}^{n} i^2 \cdot \underbrace{Pr[X=i]}$$

Wie können wir $Pr[X=i]$ ausrechnen?
Die Farbwechsel sind ja voneinander abhängig.



Wird sehr kompliziert. (Wir müssen über Abhängigkeiten im ganzen Graphen nachdenken i.e. zwischen allen Kanten)

Trick: Komplizierte Zufallsvariable zerlegen als Summe von einfacheren Zufallsvariablen.

Haben wir ja schon gemacht: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$X^2 = X \cdot X = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i \cdot X_j$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_i X_j]$$

Linearität des E.W.

Nun müssen wir nur alle möglichen Fälle zwischen 2 Kanten betrachten!

Fall 1: Teilen sich beide Knoten.
bzw $i=j$: $X_i \cdot X_j = X_i^2$ und da $X_i \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$

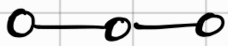
$X_i^2 = 1$ genau dann wenn $X_i = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{2}$$

Davon gibt es n-Fälle in der Doppelsumme.

Fall 2: Teilen sich 1 Knoten
bzw. $|i-j| = 1$:

$$X_i \cdot X_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_i = 1 \text{ und } X_j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



können 2^3 verschiedene (gleichwahrscheinliche) Farbkombinationen haben.

Davon gibt es nur bei 2 $((\cdot\ \cdot\ \cdot),(\cdot\ \cdot\ \cdot))$

2 Farbwechsel.

$\Rightarrow$ $Y := X_i \cdot X_j$ ist bernoulliverteilt
mit $p = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = \frac{1}{4}}}$$

Davon gibt $2n$ Fälle in der Doppelsumme.

Fall 3: kein geteilter Knoten
bzw $|i-j| > 1$:

X_i und X_j unabhängig.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}[X_j] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$n^2 - 3n$ Fälle

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_i X_j] = n \cdot \frac{1}{2} + 2n \cdot \frac{1}{4} + (n^2 - 3n) \frac{1}{4}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{n \cdot (n-1)}{4} = \underline{\frac{n^2+n}{4}}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{n^2+n}{4} - \frac{n^2}{4} = \underline{\underline{\frac{n}{4}}}$$

nice

(e) Sei $t > 0$. Benutzen Sie die Chebyshev Ungleichung um eine obere Schranke für $\Pr[X \geq \mathbb{E}[X] + t]$ zu berechnen.

(f) Seien P_{Mark} und P_{Cheb} Ihre Resultate aus den Teilen (c) und (e). Wie gross muss t sein damit $P_{\text{Mark}} \leq 1/4$? Ähnlich, wie gross muss t sein damit $P_{\text{Cheb}} \leq 1/4$?